Rappels des lois classiques en probabilités

Clément Rau
Laboratoire de Mathématiques de Toulouse
Université Paul Sabatier-IUT GEA Ponsan

Module: Prise en compte de l'aléa

1. Lois discrétes
   - Loi de Bernoulli
   - Loi Binomiale
   - Loi de Poisson
2. Vers une approche des lois continues
   - Une nouvelle notation pour l'aire
   - Une application en probabilité
   - Un exemple : les lois Normales
   - La loi Normale comme limite en loi
   - Qques lois classiques issues de la Normale : χ^2, Student.
3. Vers les intervalles de confiance
   - Concentration autour de la moyenne des lois Normales
   - Vers les intervalles de confiance

Loi Bernoulli

Une v.a X pouvant prendre 2 valeurs : 0 et 1, suit une loi de Bernoulli.

Loi Bernoulli

Une v.a X pouvant prendre 2 valeurs : 0 et 1, suit une loi de Bernoulli.

$$X : \Omega \to \{0; 1\}$$

Loi Bernoulli

Une v.a X pouvant prendre 2 valeurs : 0 et 1, suit une loi de Bernoulli.

$$X : \Omega \to \{0; 1\}$$

Elle est caractérisée par un paramétre p, qui représente la probabilité que la v.a prenne la valeur 1.

Loi Bernoulli

Une v.a X pouvant prendre 2 valeurs : 0 et 1, suit une loi de Bernoulli.

$$X : \Omega \to \{0; 1\}$$

Elle est caractérisée par un paramétre p, qui représente la probabilité que la v.a prenne la valeur 1.

Loi de X

k	0	1
$\mathbb{P}(X = k)$	$1 - p$	p

Loi Bernoulli

Une v.a X pouvant prendre 2 valeurs : 0 et 1, suit une loi de Bernoulli.

$$X : \Omega \to \{0; 1\}$$

Elle est caractérisée par un paramétre p, qui représente la probabilité que la v.a prenne la valeur 1.

Loi de X

k	0	1
$\mathbb{P}(X = k)$	$1 - p$	p

On dit et on note $X \sim Bernoulli(p)$

Exemple de base

On lance un pièce biaisée. On suppose que la proba d'obtenir "pile" est un nombre $p \in [0; 1]$ fixé.

Exemple de base

On lance un pièce biaisée. On suppose que la proba d'obtenir "pile" est un nombre $p \in [0; 1]$ fixé. Soit

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si on obtient pile} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple de base

On lance un pièce biaisée. On suppose que la proba d'obtenir "pile" est un nombre $p \in [0; 1]$ fixé. Soit

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si on obtient pile} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors X suit une Bernoulli(p).

Propriétés de la loi de Bernoulli

Si $X \sim Bernoulli(p)$, on a :

$$\mathbb{E}(X) = 0 \times \mathbb{P}(X = 0) + 1 \times \mathbb{P}(X = 1) = p.$$

Propriétés de la loi de Bernoulli

Si $X \sim Bernoulli(p)$, on a :

$$\mathbb{E}(X) = 0 \times \mathbb{P}(X = 0) + 1 \times \mathbb{P}(X = 1) = p.$$

Puis,

$$\begin{aligned} Var(X) &= (0 - p)^2 \times \mathbb{P}(X = 0) + (1 - p)^2 \times \mathbb{P}(X = 1), \\ &= p^2(1 - p) + (1 - p)^2 p, \\ &= p(1 - p). \end{aligned}$$

Propriétés de la loi de Bernoulli

Si $X \sim \mathit{Bernoulli}(p)$, on a :

$$\mathbb{E}(X) = 0 \times \mathbb{P}(X = 0) + 1 \times \mathbb{P}(X = 1) = p.$$

Puis,

$$\begin{aligned} Var(X) &= (0 - p)^2 \times \mathbb{P}(X = 0) + (1 - p)^2 \times \mathbb{P}(X = 1), \\ &= p^2(1 - p) + (1 - p)^2 p, \\ &= p(1 - p). \end{aligned}$$

Proposition (Espérance et variance d'une *Bernoulli*(p))

$$\mathbb{E}[X] = p,$$
$$V[X] = p(1 - p).$$

Exemples

On lance un dé équilibré et on considére la variable gain G qui rapporte 1 euro si on obtient un 5 et rien sinon.

Exemples

On lance un dé équilibré et on considére la variable gain G qui rapporte 1 euro si on obtient un 5 et rien sinon.
Loi de G ?

Exemples

On lance un dé équilibré et on considére la variable gain G qui rapporte 1 euro si on obtient un 5 et rien sinon.
Loi de G ?

$$G \sim Bernoulli(1/6)$$

Exemples

Une urne contient deux boules bleues et trois vertes.

Soit X la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule tirée est bleue, et 0 si c'est une verte.

Exemples

Une urne contient deux boules bleues et trois vertes.

Soit X la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule tirée est bleue, et 0 si c'est une verte.
Loi de X ?

Exemples

Une urne contient deux boules bleues et trois vertes.

Soit X la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule tirée est bleue, et 0 si c'est une verte.
Loi de X ?

$$X \sim Bernoulli(2/5)$$

Définition intuitive

Une v.a suit une loi binomiale, si elle compte le nombre de succès obtenus lors de la répétition indépendante de plusieurs expériences aléatoires identiques ayant 2 issues : succès et échec.

Définition intuitive

Une v.a suit une loi binomiale, si elle compte le nombre de succès obtenus lors de la répétition indépendante de plusieurs expériences aléatoires identiques ayant 2 issues : succès et échec.

Cette loi de probabilité discrète est donc décrite par deux paramètres :
- n le nombre d'expériences réalisées,
- p la probabilité de succès.

Définition intuitive

Une v.a suit une loi binomiale, si elle compte le nombre de succès obtenus lors de la répétition indépendante de plusieurs expériences aléatoires identiques ayant 2 issues : succès et échec.

Cette loi de probabilité discrète est donc décrite par deux paramètres :
- n le nombre d'expériences réalisées,
- p la probabilité de succès.

Conséquence : $X : \Omega \rightarrow \{0, 1, 2, ..., n\}$

Définition intuitive

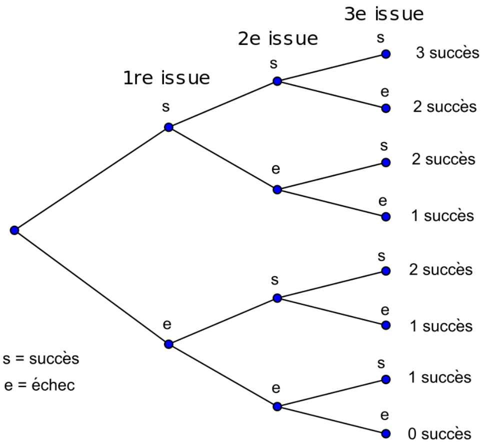
Une v.a suit une loi binomiale, si elle compte le nombre de succès obtenus lors de la répétition indépendante de plusieurs expériences aléatoires identiques ayant 2 issues : succès et échec.

Cette loi de probabilité discrète est donc décrite par deux paramètres :
- n le nombre d'expériences réalisées,
- p la probabilité de succès.

Conséquence : $X : \Omega \to \{0, 1, 2, ..., n\}$
Notation : $X \sim Binomiale(n, p)$

Exemple

On joue 3 fois à un pile ou face.



Définition mathématique

Définition

Si X peut s'écrire ainsi :

$$X = X_1 + \cdots + X_k + \cdots + X_n$$

où les X_k sont des variables aléatoires de Bernoulli(p) indépendantes. Alors X suit une Binomiale(n, p).

Définition mathématique

Définition

Si X peut s'écrire ainsi :

$$X = X_1 + \cdots + X_k + \cdots + X_n$$

où les X_k sont des variables aléatoires de Bernoulli(p) indépendantes. Alors X suit une Binomiale(n, p).

Explications :

Définition mathématique

Définition

Si X peut s'écrire ainsi :

$$X = X_1 + \cdots + X_k + \cdots + X_n$$

où les X_k sont des variables aléatoires de Bernoulli(p) indépendantes. Alors X suit une Binomiale(n, p).

Explications :

D'une certaine manière, en mathématiques, mais certainement aussi ailleurs, il n'y a rien de plus difficile que la simplicité. [L. L]

Exemple de base

On joue n fois au pile ou face.

Exemple de base

On joue n fois au pile ou face. Pour $1 \leq i \leq n$, on pose

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si on obtient Pile} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{au } i^{\text{iéme}}\text{lancé.}$$

Exemple de base

On joue n fois au pile ou face. Pour $1 \leq i \leq n$, on pose

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si on obtient Pile} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{au } i^{\text{iéme}} \text{lancé.}$$

Soit X le nombre de "Piles" obtenus au cours des n lancés indépendants de la pièce.

Exemple de base

On joue n fois au pile ou face. Pour $1 \leq i \leq n$, on pose

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si on obtient Pile} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{au } i^{\text{iéme}} \text{lancé.}$$

Soit X le nombre de "Piles" obtenus au cours des n lancés indépendants de la pièce.
Alors,

$$X = X_1 + X_2 + ... + X_n$$

et X suit une loi $\mathit{Binomiale}(n, p)$.

Calcul des probabilités d'une binomiale

Proposition

Soit X une v.a qui suit une loi Binomiale(n, p). Pour tout $0 \leq k \leq n$, on a :

$$\mathbb{P}[X = k] = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}.$$

Calcul des probabilités d'une binomiale

Proposition

Soit X une v.a qui suit une loi Binomiale(n, p). Pour tout $0 \leq k \leq n$, on a :

$$\mathbb{P}[X = k] = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}.$$

Preuve :

Remarque

On a bien, en utilisant la formule du binome,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}[X=k] &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \\ &= (p+1-p)^n \\ &= 1\end{aligned}$$

Paramètres d'une binomiale

Proposition (Espérance et variance)

$$\mathbb{E}[X] = np,$$
$$V[X] = np(1-p).$$

Paramètres d'une binomiale

Proposition (Espérance et variance)

$$\mathbb{E}[X] = np,$$
$$V[X] = np(1-p).$$

Remarque

Comprendre la formule de l'espérance

Intuition sur la formule de l'espérance

Une urne contient deux boules bleues et trois vertes.

Supposons que l'on tire 5 fois une boules avec remise après chaque lancé, et que l'on appelle Y la variable aléatoire qui compte le nombre de boules bleues tirées.

Intuition sur la formule de l'espérance

Une urne contient deux boules bleues et trois vertes.

Supposons que l'on tire 5 fois une boules avec remise après chaque lancé, et que l'on appelle Y la variable aléatoire qui compte le nombre de boules bleues tirées.
Quelle est la loi de Y ?

Intuition sur la formule de l'espérance

Une urne contient deux boules bleues et trois vertes.

Supposons que l'on tire 5 fois une boules avec remise après chaque lancé, et que l'on appelle Y la variable aléatoire qui compte le nombre de boules bleues tirées.
Quelle est la loi de Y ?

$$Y \sim \mathit{Binomiale}(5; 2/5)$$

Intuition sur la formule de l'espérance

Une urne contient deux boules bleues et trois vertes.

Supposons que l'on tire 5 fois une boules avec remise après chaque lancé, et que l'on appelle Y la variable aléatoire qui compte le nombre de boules bleues tirées.
Quelle est la loi de Y ?

$$Y \sim Binomiale(5; 2/5)$$

Que vaut selon vous l'espérance de Y sans calcul ? Vérifier votre résultat avec la formule ?

Intuition sur la formule de l'espérance

Une urne contient deux boules bleues et trois vertes.

Supposons que l'on tire 5 fois une boules avec remise après chaque lancé, et que l'on appelle Y la variable aléatoire qui compte le nombre de boules bleues tirées.
Quelle est la loi de Y ?

$$Y \sim \mathit{Binomiale}(5; 2/5)$$

Que vaut selon vous l'espérance de Y sans calcul ? Vérifier votre résultat avec la formule ? On s'attend à obtenir en moyenne 2 bleues si on pioche 5 fois une boule...Et la formule donne bien $\mathbb{E}(Y) = 5 \times \frac{2}{5} = 2$.

Preuve :

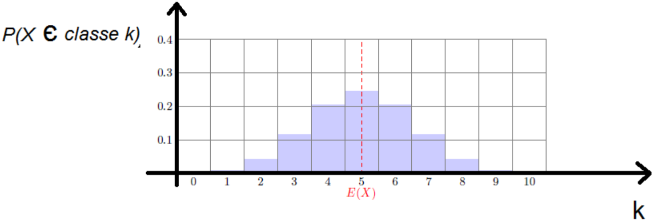
On a l'écriture $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_k + \cdots + X_n$, ou les X_k sont n variables aléatoires de Bernoulli *indépendantes*. On a en effet par linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \cdots + \mathbb{E}[X_k] + \cdots + \mathbb{E}[X_n] = n \cdot \mathbb{E}[X_1] = n \cdot p$$

et par indépendance des variables aléatoires $(X_k)_{k=1\dots n}$

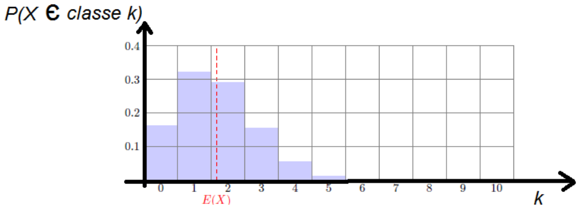
$$V[X] = V[X_1] + V[X_2] + \cdots + V[X_k] + \cdots + V[X_n] = n \cdot V[X_1] = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

Allure d'une Binomiale



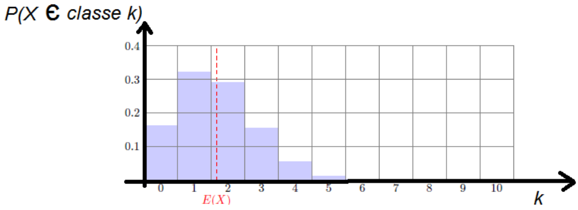
Loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{2}$

Allure d'une Binomiale



Loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \dfrac{1}{6}$

Allure d'une Binomiale



Loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \dfrac{1}{6}$

Allure d'une Binomiale

Garder en tête ces schémas, pour une approximation en loi d'une binomiale...

Exemples et Exercices

Exemple :

Une entreprise pharmaceutique décide de faire des économies sur les tarifs d'affranchissements des courriers publicitaires à envoyer aux clients. Pour cela, elle décide d'affranchir, au hasard, une proportion de 3 lettres sur 5 au tarif urgent, les autres au tarif normal.

Exemples et Exercices

Exemple :

Une entreprise pharmaceutique décide de faire des économies sur les tarifs d'affranchissements des courriers publicitaires à envoyer aux clients. Pour cela, elle décide d'affranchir, au hasard, une proportion de 3 lettres sur 5 au tarif urgent, les autres au tarif normal. Quatre lettres sont envoyées dans un cabinet médical de quatre médecins.

Exemples et Exercices

Exemple :

Une entreprise pharmaceutique décide de faire des économies sur les tarifs d'affranchissements des courriers publicitaires à envoyer aux clients. Pour cela, elle décide d'affranchir, au hasard, une proportion de 3 lettres sur 5 au tarif urgent, les autres au tarif normal. Quatre lettres sont envoyées dans un cabinet médical de quatre médecins.

Quelle est la probabilité des événements suivant :
A : «Exactement 2 médecins sur les quatre reçoivent une lettre au tarif urgent»
B : «Au moins l'un d'entre eux reçoit une lettre au tarif urgent»

Exemple

Soit X la v.a désignant le nombre de lettres envoyées parmi les quatre en tarif urgent.

Exemple

Soit X la v.a désignant le nombre de lettres envoyées parmi les quatre en tarif urgent. Montrons que $X \sim Binomiale(4, \frac{3}{5})$.

Exemple

Soit X la v.a désignant le nombre de lettres envoyées parmi les quatre en tarif urgent. Montrons que $X \sim Binomiale(4, \frac{3}{5})$.

- Pour $1 \leq i \leq 4$, on pose :

$$X_i := \begin{cases} 1 & \text{si la lettre i est envoyée en tarif urgent} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple

Soit X la v.a désignant le nombre de lettres envoyées parmi les quatre en tarif urgent. Montrons que $X \sim Binomiale(4, \frac{3}{5})$.

- Pour $1 \leq i \leq 4$, on pose :

$$X_i := \begin{cases} 1 & \text{si la lettre i est envoyée en tarif urgent} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- On a $X_i \sim Bernoulli(3/5)$ et les X_i sont indépendantes.

Exemple

Soit X la v.a désignant le nombre de lettres envoyées parmi les quatre en tarif urgent. Montrons que $X \sim Binomiale(4, \frac{3}{5})$.

- Pour $1 \leq i \leq 4$, on pose :

$$X_i := \begin{cases} 1 & \text{si la lettre i est envoyée en tarif urgent} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- On a $X_i \sim Bernoulli(3/5)$ et les X_i sont indépendantes.
- Enfin, on a :

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4.$$

Exemple

Soit X la v.a désignant le nombre de lettres envoyées parmi les quatre en tarif urgent. Montrons que $X \sim Binomiale(4, \frac{3}{5})$.

- Pour $1 \leq i \leq 4$, on pose :

$$X_i := \begin{cases} 1 & \text{si la lettre i est envoyée en tarif urgent} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- On a $X_i \sim Bernoulli(3/5)$ et les X_i sont indépendantes.
- Enfin, on a :

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4.$$

$$\Rightarrow \quad X \sim Binomiale(4\,;3/5)$$

Exemple

Soit X la v.a désignant le nombre de lettres envoyées parmi les quatre en tarif urgent. Montrons que $X \sim \mathit{Binomiale}(4, \frac{3}{5})$.

- Pour $1 \leq i \leq 4$, on pose :

$$X_i := \begin{cases} 1 & \text{si la lettre i est envoyée en tarif urgent} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- On a $X_i \sim \mathit{Bernoulli}(3/5)$ et les X_i sont indépendantes.
- Enfin, on a :

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4.$$

$$\Rightarrow \quad X \sim \mathit{Binomiale}(4\,;3/5)$$

Exemple

L'évenement A correspond à $\{X = 2\}$.

Exemple

L'évenement A correspond à $\{X = 2\}$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(X = 2), \\
&= \binom{4}{2} \times (\frac{3}{5})^2 \times (\frac{2}{5})^2, \\
&= 6 \times \frac{3^2 \times 2^2}{5^4}, \\
&= \frac{216}{5^4}.
\end{aligned}$$

Exemple

L'évenement B correspond à $\{X \geq 1\}$.

Exemple

L'évenement B correspond à $\{X \geq 1\}$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(X \geq 1), \\
&= 1 - P(X < 1), \\
&= 1 - \mathbb{P}(X = 0), \\
&= 1 - \binom{4}{0} (\frac{3}{5})^0 (\frac{2}{5})^4 \\
&= 1 - (\frac{2}{5})^4
\end{aligned}$$

Loi de Poisson

Cette loi peut modéliser les événements rares. Par exemple, elle peut modèliser le nombre d'appels reçus par un standard téléphonique, le nombre de voyageurs se présentant à un guichet dans la journée, etc. Pour des raisons tues ici, elle s'exprime à l'aide de la fonction exponentielle et dépend d'un paramètre $\lambda > 0$, qui correspond au nombre moyen d'occurence du phénomène observé pendant la durée donnée. Plus formellement :

Définition et paramètres d'une loi de Poisson

Définition

Une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{N}$ suit une ***loi de Poisson de paramètre*** $\lambda > 0$, *notée* $\mathcal{P}(\lambda)$, *si pour tout* $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}[X = k] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Définition et paramètres d'une loi de Poisson

Définition

Une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{N}$ suit une ***loi de Poisson de paramètre*** $\lambda > 0$, *notée* $\mathcal{P}(\lambda)$, *si pour tout* $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}[X = k] = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Proposition (Espérance et variance)

$$\mathbb{E}[X] = \lambda,$$
$$V[X] = \lambda.$$

Définition et paramètres d'une loi de Poisson

Définition

Une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{N}$ *suit une* ***loi de Poisson de paramètre*** $\lambda > 0$, *notée* $\mathcal{P}(\lambda)$, *si pour tout* $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}[X = k] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Proposition (Espérance et variance)

$$\mathbb{E}[X] = \lambda,$$
$$V[X] = \lambda.$$

Bon exercice : démontrer cette propriété !

Exemple :

Si on sait qu'en général un standard téléphonique reçoit 20 appels dans la journée et que l'on peut modéliser le nombre aléatoire d'appels par une loi de Poisson. Calculer la probabilité d'avoir 15 appels dans une journée ?

Exemple :

Si on sait qu'en général un standard téléphonique reçoit 20 appels dans la journée et que l'on peut modéliser le nombre aléatoire d'appels par une loi de Poisson. Calculer la probabilité d'avoir 15 appels dans une journée ?

Soit X la v.a indiquant le nombre d'appels quotidien.

Exemple :

Si on sait qu'en général un standard téléphonique reçoit 20 appels dans la journée et que l'on peut modéliser le nombre aléatoire d'appels par une loi de Poisson. Calculer la probabilité d'avoir 15 appels dans une journée ?

Soit X la v.a indiquant le nombre d'appels quotidien. Par hypothèse, X suit une loi de Poisson et son espérance est 20. On en déduit que $\lambda = 20$. Donc $X \sim \mathcal{P}(20)$.

Exemple :

Si on sait qu'en général un standard téléphonique reçoit 20 appels dans la journée et que l'on peut modéliser le nombre aléatoire d'appels par une loi de Poisson. Calculer la probabilité d'avoir 15 appels dans une journée ?

Soit X la v.a indiquant le nombre d'appels quotidien. Par hypothèse, X suit une loi de Poisson et son espérance est 20. On en déduit que $\lambda = 20$. Donc $X \sim \mathcal{P}(20)$. Ainsi, $\mathbb{P}(X = 15) = \frac{20^{15}}{15!} e^{-20} \approx 0,052$.

Exemple :

Si on sait qu'en général un standard téléphonique reçoit 20 appels dans la journée et que l'on peut modéliser le nombre aléatoire d'appels par une loi de Poisson. Calculer la probabilité d'avoir 15 appels dans une journée ?

Soit X la v.a indiquant le nombre d'appels quotidien. Par hypothèse, X suit une loi de Poisson et son espérance est 20. On en déduit que $\lambda = 20$. Donc $X \sim \mathcal{P}(20)$. Ainsi, $\mathbb{P}(X = 15) = \frac{20^{15}}{15!}e^{-20} \approx 0,052$.

Approximation en loi

La loi de Poisson apparaît comme la limite de certaines Binomiales

Idée

Imaginons une variable $X \sim Binomiale(n, p)$ avec n grand et p petit, de l'ordre de $\frac{\lambda}{n}$...

Idée

Imaginons une variable $X \sim \textit{Binomiale}(n,p)$ avec n grand et p petit, de l'ordre de $\frac{\lambda}{n}$...

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=k) &= \binom{n}{k}\, p^k\, (1-p)^{n-k} \\
&= \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}\, \frac{p^k}{(1-p)^k} (1-p)^n \\
&\simeq \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{n^k}\, \frac{\lambda^k}{k!}\, \frac{1}{(1-\frac{\lambda}{n})^k}\, (1-\frac{\lambda}{n})^n \\
&\simeq \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}
\end{aligned}$$

Utilisation pratique de cette approximation

Si X suit une *Binomiale*(n, p), avec n grand $(n \geq 30)$ et p petit $(p \leq 0,1)$.

Utilisation pratique de cette approximation

Si X suit une *Binomiale*(n, p), avec n grand ($n \geq 30$) et p petit ($p \leq 0,1$).

Alors,

$$\text{pour tout } k \geq 0, \qquad \mathbb{P}(X = k) \simeq \mathbb{P}(Y = k),$$

où Y suit une loi de Poisson de paramétre $\lambda = n \times p$.

Utilisation pratique de cette approximation

Si X suit une *Binomiale*(n, p), avec n grand ($n \geq 30$) et p petit ($p \leq 0,1$).

Alors,

$$\text{pour tout } k \geq 0, \qquad \mathbb{P}(X = k) \simeq \mathbb{P}(Y = k),$$

où Y suit une loi de Poisson de paramétre $\lambda = n \times p$.

Concrétement, on s'autorise donc l'approximation suivante :

$$\mathbb{P}(X = k) \simeq \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Note

De manière plus rigoureuse, l'approximation précédente s'énoncerait ainsi :

Proposition

Soit X_n des v.a telle que $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors pour tout $0 \leq k \leq n$, on a

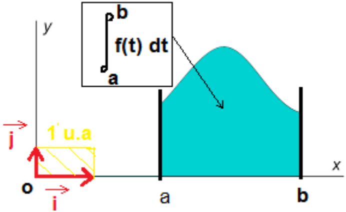
$$\textit{si} \lim_{n \to +\infty} np_n = \lambda, \ \textit{alors} \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(Y = k)$$

On dit que X_n converge en loi vers la loi de Poisson et on écrit :

$$X_n \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} Y$$

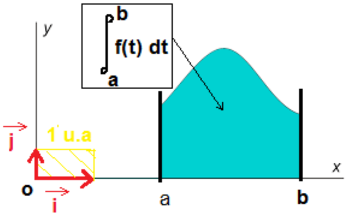
Définition

Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$. Soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On appelle intégrale de f entre a et b, et on note $\int_a^b f(t)\, dt$, l'aire (en unités d'aire) de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe $(0x)$, et les 2 droites $x = a$ et $x = b$.



Définition

Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$. Soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On appelle intégrale de f entre a et b, et on note $\int_a^b f(t)\,dt$, l'aire (en unités d'aire) de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe $(0x)$, et les 2 droites $x = a$ et $x = b$.



Remarque

La variable t est muette. $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(u)\,du$.

Remarque

La variable t est muette. $\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(u)\, du.$

Exemples

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5$. Calculer $\int_1^3 f(x)\, dx$.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = x$. Calculer $\int_0^4 g(x)\, dx$.
3. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $h(x) = 2x + 1$. Calculer $\int_1^3 h(x)\, dx$.

1. Lois discrétes
   - Loi de Bernoulli
   - Loi Binomiale
   - Loi de Poisson

2. Vers une approche des lois continues
   - Une nouvelle notation pour l'aire
   - **Une application en probabilité**
   - Un exemple : les lois Normales
   - La loi Normale comme limite en loi
   - Qques lois classiques issues de la Normale : χ^2, Student.

3. Vers les intervalles de confiance
   - Concentration autour de la moyenne des lois Normales
   - Vers les intervalles de confiance

V.a continues

Définition

Il existe des v.a qui peuvent prendre toutes les valeurs d'un intervalle (y compris $\mathbb{R}$). De telles v.a sont dites v.a continues.

V.a continues

Définition

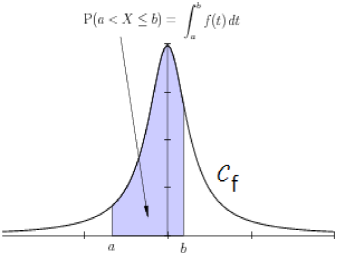
Il existe des v.a qui peuvent prendre toutes les valeurs d'un intervalle (y compris $\mathbb{R}$). De telles v.a sont dites v.a continues.

Exemple :
Soit T la v.a indiquant la température à l'université, un jour au hasard.

Densité

La loi de ce type de v.a X peut être "codée" par une fonction f positive définie sur $\mathbb{R}$ de la manière suivante :

$$\mathbb{P}(X \in [a; b]) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

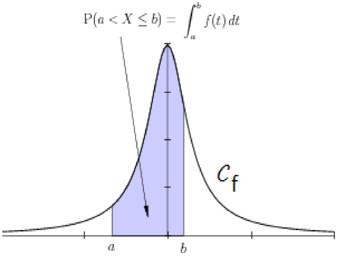


Densité

La loi de ce type de v.a X peut être "codée" par une fonction f positive définie sur $\mathbb{R}$ de la manière suivante :

$$\mathbb{P}(X \in [a;b]) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

On dit que f est une densité de la v.a X.

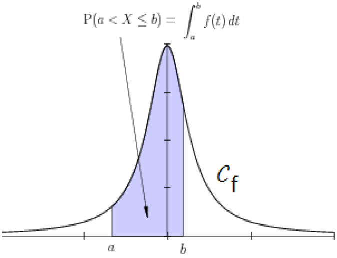


Densité

La loi de ce type de v.a X peut être "codée" par une fonction f positive définie sur $\mathbb{R}$ de la manière suivante :

$$\mathbb{P}(X \in [a; b]) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

On dit que f est une densité de la v.a X.



Remarque

1. *Nécessairement, la fonction f (la densité de X) doit être positive et son aire totale sous la courbe doit valeur 1.*

$$ie : \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1.$$

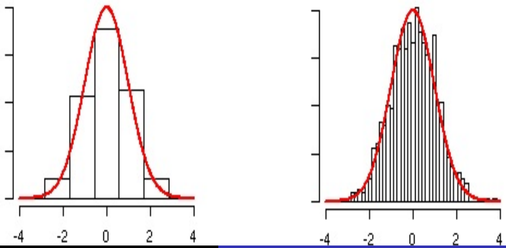
Remarque

1. *Nécessairement, la fonction f (la densité de X) doit être positive et son aire totale sous la courbe doit valeur 1.*

$$ie : \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1.$$

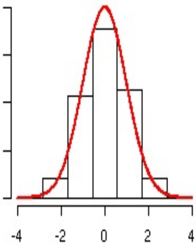
2. *La densité f est l'équivalent continu du "tableau" dans le cas discret.*

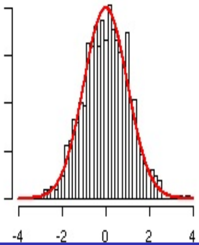
Approche plus naturelle des densités comme limite d'histogramme



Approche plus naturelle des densités comme limite d'histogramme

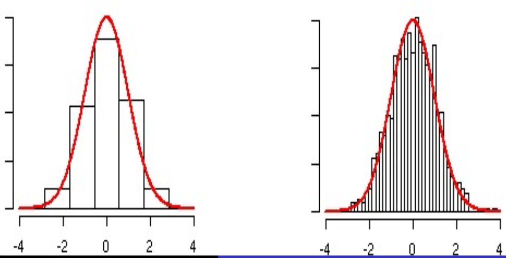
- *Origine de ces points de vue :* histogramme des fréquences d'une série regroupée par classe dont l'amplitude des classes devient "petites"...





Approche plus naturelle des densités comme limite d'histogramme

- *Origine de ces points de vue :* histogramme des fréquences d'une série regroupée par classe dont l'amplitude des classes devient "petites"...



Un exemple pédagogique

Exemple

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -1 \\ 1 + x & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 0 \\ 1 - x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Calculer
   a. $\mathbb{P}(X \geq 0)$.
   b. $\mathbb{P}(X \geq 0.5)$.
   c. $\mathbb{P}(X \in [-0,8; 0,2])$.
   d. $\mathbb{P}(X = -0,4)$.

Question 1

f est une densité ssi

Question 1

$$f \text{ est une densité ssi } \left\{ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0 \ et \ \int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt = 1 \right\}.$$

Question 1

f est une densité ssi $\left\{ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0 \ et \ \int_{\mathbb{R}} f(t)\, dt = 1 \right\}$.

- On a bien $f \geq 0$.

Question 1

f est une densité ssi $\left\{ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0 \ et \ \int_{\mathbb{R}} f(t)\, dt = 1 \right\}$.

- On a bien $f \geq 0$.
- Par ailleurs, on a successivement

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\, dt = \mathcal{A}_{\text{triangle}} = 1$$

Question 1

f est une densité ssi $\left\{ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0 \text{ et } \int_{\mathbb{R}} f(t)\, dt = 1 \right\}$.

- On a bien $f \geq 0$.
- Par ailleurs, on a successivement

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\, dt = \mathcal{A}_{\text{triangle}} = 1$$

Ainsi, *f* est bien une densité de probabilité.

Remarque

Plus tard, on pourra montrer que l'intégrale vaut 1, par le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f(t)\, dt &= \int_{-1}^{0} 1+t\, dt + \int_{0}^{1} 1-t\, dt, \\
&= \left[\frac{(1+t)^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{-(1-t)^2}{2}\right]_{0}^{1}, \\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Question 2

Découverte, vers la Loi Normale

Si vous jetez sur le papier une théorie qui à chaque pas est naturelle, elle va être incomparablement plus puissante qu'une théorie que vous aurez forgée par la volonté, et qui de fait, sera artificielle.

Découverte, vers la Loi Normale

Si vous jetez sur le papier une théorie qui à chaque pas est naturelle, elle va être incomparablement plus puissante qu'une théorie que vous aurez forgée par la volonté, et qui de fait, sera artificielle.
Nous pouvons mesurer une théorie à sa fécondité (...)

[L. Lafforgue]

Découverte, vers la Loi Normale

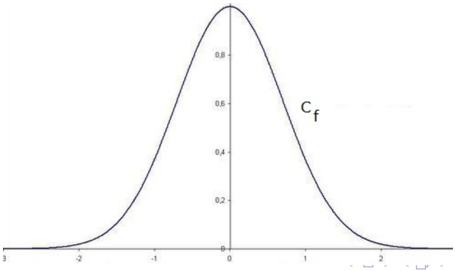
Si vous jetez sur le papier une théorie qui à chaque pas est naturelle, elle va être incomparablement plus puissante qu'une théorie que vous aurez forgée par la volonté, et qui de fait, sera artificielle.
Nous pouvons mesurer une théorie à sa fécondité (...)

[L. Lafforgue]

Sens ici ?

Loi Normale centrée réduite

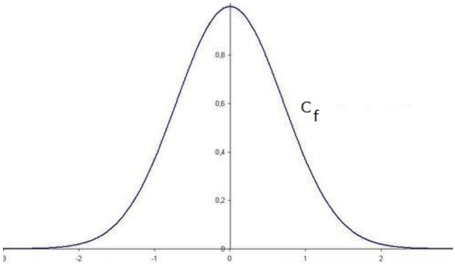
- (une) origine : Binomiale avec n grand (histogramme)



Loi Normale centrée réduite

- (une) origine : Binomiale avec n grand (histogramme)
- Concrètement : la v.a X suit une loi Normale (centrée réduite) si sa densité est

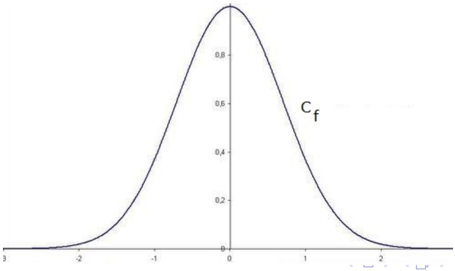
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$



Loi Normale centrée réduite

- (une) origine : Binomiale avec n grand (histogramme)
- Concrètement : la v.a X suit une loi Normale (centrée réduite) si sa densité est

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$



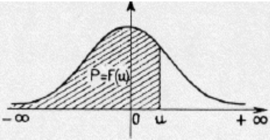
Loi Normale

- Il existe des tables qui donnent les aires, et donc les probabilités (cf : TD)

Loi Normale

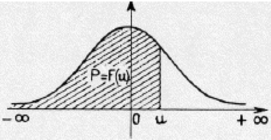
- Il existe des tables qui donnent les aires, et donc les probabilités (cf : TD)
- La notation est $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Table de la loi Normale centrée réduite



u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5[illegible]60	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5[illegible]57	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5[illegible]48	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6[illegible]31	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6[illegible]00	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7[illegible]54	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852

Table de la loi Normale centrée réduite



u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5[illegible]60	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5[illegible]57	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5[illegible]48	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6[illegible]31	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6[illegible]00	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7[illegible]54	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852

On lit par exemple $\mathbb{P}(X \leq 0,64) = 0,7389$.

Loi Normale générale

Loi Normale générale

On dit que X suit une $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, si la densité est :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Loi Normale générale

On dit que X suit une $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, si la densité est :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

L'usage d'un changement de variable $t = \frac{(x-\mu)}{\sigma}$ permet de se ramener à un calcul d'intégrale à partir de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, ce qui nous permettra de consulter les tables existant pour la loi standard précédente.

Loi Normale générale

On dit que X suit une $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, si la densité est :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

L'usage d'un changement de variable $t = \frac{(x-\mu)}{\sigma}$ permet de se ramener à un calcul d'intégrale à partir de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, ce qui nous permettra de consulter les tables existant pour la loi standard précédente. On a le théorème suivant :

Loi Normale générale

Théorème

Soit X une variable aléatoire de loi Normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ et Z la variable aléatoire définie par

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma},$$

alors Z suit une loi Normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

Loi Normale générale

Théorème

Soit X une variable aléatoire de loi Normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ et Z la variable aléatoire définie par

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma},$$

alors Z suit une loi Normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

Attention, certains auteurs utilisent la notation $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et pas $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

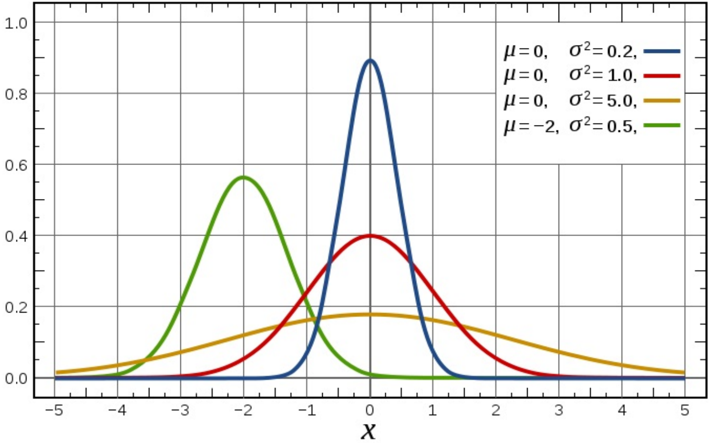
Paramètres

On a également :

Proposition (Espérance et variance)

$$\mathbb{E}[X] = \mu,$$
$$V(X) = \sigma^2.$$

Allure de la densité en fonction de μ et σ



Manipulation des lois Normales générales

Lecture table : Considérons X une v. a. qui suit une loi $\mathcal{N}(6,2)$

Manipulation des lois Normales générales

<u>Lecture table</u> : Considérons X une v. a. qui suit une loi $\mathcal{N}(6, 2)$ ($\sigma(X)$ vaut donc ici 2 et $\mathbb{E}(X) = 6$)

Manipulation des lois Normales générales

Lecture table : Considérons X une v. a. qui suit une loi $\mathcal{N}(6, 2)$ ($\sigma(X)$ vaut donc ici 2 et $\mathbb{E}(X) = 6$)
Et soit Z une v.a. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$,

Manipulation des lois Normales générales

Lecture table : Considérons X une v. a. qui suit une loi $\mathcal{N}(6,2)$ ($\sigma(X)$ vaut donc ici 2 et $\mathbb{E}(X) = 6$)
Et soit Z une v.a. de loi $\mathcal{N}(0,1)$, on a par exemple

$$\mathbb{P}[X \leq 7] = \mathbb{P}[\frac{X-6}{2} \leq \frac{7-6}{2}]$$
$$= \mathbb{P}[Z \leq \frac{1}{2}]$$
$$= 0.6915.$$

Manipulation des lois Normales générales

Stabilité par somme :

Proposition

Si $X_1 \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$ est indépendante de $X_2 \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$, alors la somme $X_1 + X_2$ suit encore une loi Normale. Plus précisément, $X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(m_1 + m_2; \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$.

Manipulation des lois Normales générales

Stabilité par somme :

Proposition

Si $X_1 \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$ est indépendante de $X_2 \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$, alors la somme $X_1 + X_2$ suit encore une loi Normale. Plus précisément, $X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(m_1 + m_2; \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$.

- Ex 1 : Si $X_1 \sim \mathcal{N}(10, 4)$ est indépendante de $X_2 \sim \mathcal{N}(7, 3)$, alors

Manipulation des lois Normales générales

Stabilité par somme :

Proposition

Si $X_1 \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$ est indépendante de $X_2 \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$, alors la somme $X_1 + X_2$ suit encore une loi Normale. Plus précisément, $X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(m_1 + m_2; \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$.

- Ex 1 : Si $X_1 \sim \mathcal{N}(10, 4)$ est indépendante de $X_2 \sim \mathcal{N}(7, 3)$, alors

$$Z := X_1 + X_2 - 2 \sim \mathcal{N}(15, 5).$$

Manipulation des lois Normales générales

Stabilité par somme :

Proposition

Si $X_1 \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$ est indépendante de $X_2 \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$, alors la somme $X_1 + X_2$ suit encore une loi Normale. Plus précisément, $X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(m_1 + m_2; \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$.

- Ex 1 : Si $X_1 \sim \mathcal{N}(10, 4)$ est indépendante de $X_2 \sim \mathcal{N}(7, 3)$, alors
$$Z := X_1 + X_2 - 2 \sim \mathcal{N}(15, 5).$$
- Ex 2 : Si pour $1 \leq i \leq n$, $X_i \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$ et sont indépenantes, alors

Manipulation des lois Normales générales

Stabilité par somme :

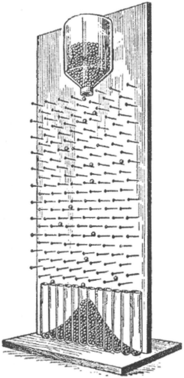
Proposition

Si $X_1 \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$ est indépendante de $X_2 \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$, alors la somme $X_1 + X_2$ suit encore une loi Normale. Plus précisément, $X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(m_1 + m_2; \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$.

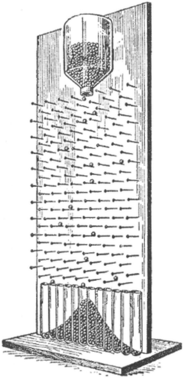
- Ex 1 : Si $X_1 \sim \mathcal{N}(10, 4)$ est indépendante de $X_2 \sim \mathcal{N}(7, 3)$, alors
$$Z := X_1 + X_2 - 2 \sim \mathcal{N}(15, 5).$$
- Ex 2 : Si pour $1 \leq i \leq n$, $X_i \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$ et sont indépenantes, alors
$$\bar{X}_n \sim \mathcal{N}(m; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}).$$

1. Lois discrétes
   - Loi de Bernoulli
   - Loi Binomiale
   - Loi de Poisson
2. Vers une approche des lois continues
   - Une nouvelle notation pour l'aire
   - Une application en probabilité
   - Un exemple : les lois Normales
   - La loi Normale comme limite en loi
   - Qques lois classiques issues de la Normale : χ^2, Student.
3. Vers les intervalles de confiance
   - Concentration autour de la moyenne des lois Normales
   - Vers les intervalles de confiance

La planche de Galton



La planche de Galton



"La somme de hasard est un hasard controlé"

La loi Normale comme limite en loi

Proposition

Soit S_n Binomiale $\mathcal{B}(n;p)$. Si $n \geq 30, \quad n \cdot p \geq 5 \quad \text{et} \quad \mathrm{n} \cdot (1-\mathrm{p}) > 5$, on peut approximer la loi de S_n par une loi Normale. Plus précisément, on a :

$$S_n \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(np; \sqrt{npq}).$$

La loi Normale comme limite en loi

Proposition

Soit S_n Binomiale $\mathcal{B}(n; p)$. Si $n \geq 30, \quad n \cdot p \geq 5 \quad \text{et} \quad n \cdot (1-p) > 5$, on peut approximer la loi de S_n par une loi Normale. Plus précisément, on a :

$$S_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(np; \sqrt{npq}).$$

Remarquez que cette propriété peut également s'énoncer ainsi :

$$\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} U,$$

où $U \sim \mathcal{N}(0; 1)$.

La loi Normale comme limite en loi

- Cette propriété est une conséquence du Théoréme central limite que l'on abordera plus tard.

La loi Normale comme limite en loi

- Cette propriété est une conséquence du Théoréme central limite que l'on abordera plus tard.
- Ne pas confondre l'approximation de la loi de Poisson par une Binomiale et celle de la loi Normale ! ! !

1. Lois discrétes
   - Loi de Bernoulli
   - Loi Binomiale
   - Loi de Poisson
2. Vers une approche des lois continues
   - Une nouvelle notation pour l'aire
   - Une application en probabilité
   - Un exemple : les lois Normales
   - La loi Normale comme limite en loi
   - Qques lois classiques issues de la Normale : χ^2, Student.
3. Vers les intervalles de confiance
   - Concentration autour de la moyenne des lois Normales
   - Vers les intervalles de confiance

Loi du Khi-deux

Définition

Soient $X_1, ..., X_n$ des v.a indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Posons

$$Z = \sum_{i=1...n} X_i^2,$$

par définition la v.a. Z suit une loi du khi-deux à n degré(s) de liberté (abréviation d.d.l.). On la note $\chi^2(n)$.

Loi du Khi-deux

Définition

Soient $X_1, ..., X_n$ des v.a indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Posons

$$Z = \sum_{i=1...n} X_i^2,$$

par définition la v.a. Z suit une loi du khi-deux à n degré(s) de liberté (abréviation d.d.l.). On la note $\chi^2(n)$.

Quelques Propriétés :
- $Z \geq 0$, cette loi n'est donc pas symétrique,
- Z admet une densité,
- $\mathbb{E}(Z) = n$ et $Var(Z) = 2n$

Allure de la densité d'un χ^2

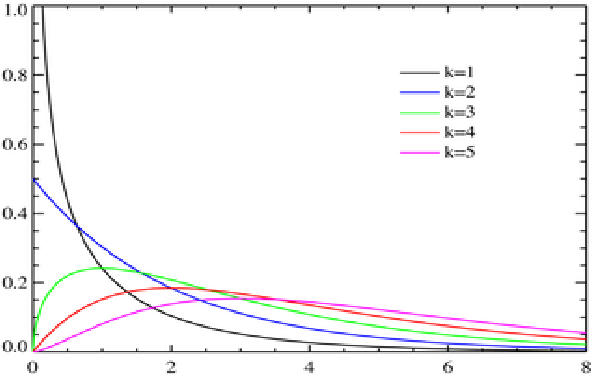


Figure – Densité de la loi $\chi^2(k)$.

Loi de Student

Définition

Soient $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $Y \sim \chi^2(n)$. Posons $T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$. Alors T suit une loi de Student à n degré de liberté et on la note $\mathcal{T}(n)$ ou $Student(k)$

Allure de la densité de Student

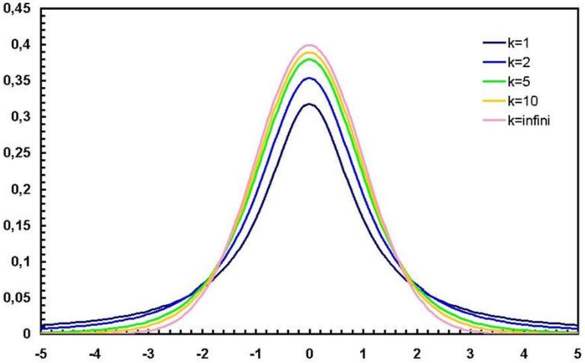


Figure – Densité de la loi de *Student*(n).

Ces derniéres lois seront utiles pour les estimations et la théorie des tests.

Ces derniéres lois seront utiles pour les estimations et la théorie des tests.
L'expression explicite des densités de ces lois n'est pas à connaître (sauf pour la loi Normale). Des tables statistiques et des logiciels permettent de les manipuler.

1. Lois discrétes
   - Loi de Bernoulli
   - Loi Binomiale
   - Loi de Poisson
2. Vers une approche des lois continues
   - Une nouvelle notation pour l'aire
   - Une application en probabilité
   - Un exemple : les lois Normales
   - La loi Normale comme limite en loi
   - Qques lois classiques issues de la Normale : χ^2, Student.
3. Vers les intervalles de confiance
   - Concentration autour de la moyenne des lois Normales
   - Vers les intervalles de confiance

Concentration autour de la moyenne pour une loi NORMALE

Dans l'intervalle $[m-\sigma, m+\sigma]$ de longueur 2σ et centré autour de la moyenne, on peut calculer qu'il y a 68% des individus, lorsque qu'une v.a. suit une loi $\mathcal{N}(m,\sigma)$:

$$\mathbb{P}[m-\sigma \leq X \leq m+\sigma] = 0.68$$

Concentration autour de la moyenne pour une loi NORMALE

Dans l'intervalle $[m-\sigma, m+\sigma]$ de longueur 2σ et centré autour de la moyenne, on peut calculer qu'il y a 68% des individus, lorsque qu'une v.a. suit une loi $\mathcal{N}(m, \sigma)$:

$$\mathbb{P}[m-\sigma \leq X \leq m+\sigma] = 0.68$$

On établit aussi que 95% d'un échantillon représentatif d'une loi Normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$ est approximativement situé entre $m-2\sigma$ et $m+2\sigma$. Plus exactement,

$$\mathbb{P}[m-1.96\sigma \leq X \leq m+1.96\sigma] = 0.95$$

Concentration autour de la moyenne pour une loi NORMALE

Dans l'intervalle $[m-\sigma, m+\sigma]$ de longueur 2σ et centré autour de la moyenne, on peut calculer qu'il y a 68% des individus, lorsque qu'une v.a. suit une loi $\mathcal{N}(m,\sigma)$:

$$\mathbb{P}[m-\sigma \leq X \leq m+\sigma] = 0.68$$

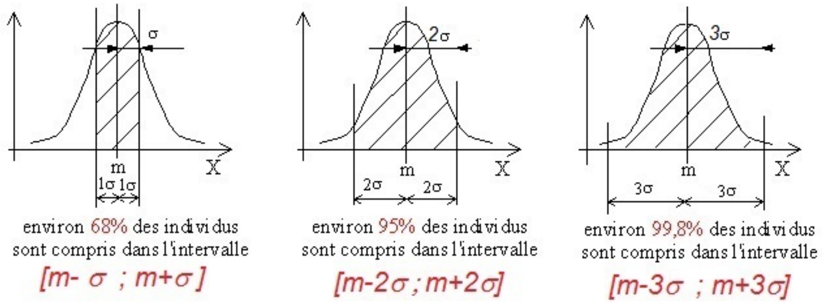
On établit aussi que 95% d'un échantillon représentatif d'une loi Normale $\mathcal{N}(m,\sigma)$ est approximativement situé entre $m-2\sigma$ et $m+2\sigma$. Plus exactement,

$$\mathbb{P}[m-1.96\sigma \leq X \leq m+1.96\sigma] = 0.95$$

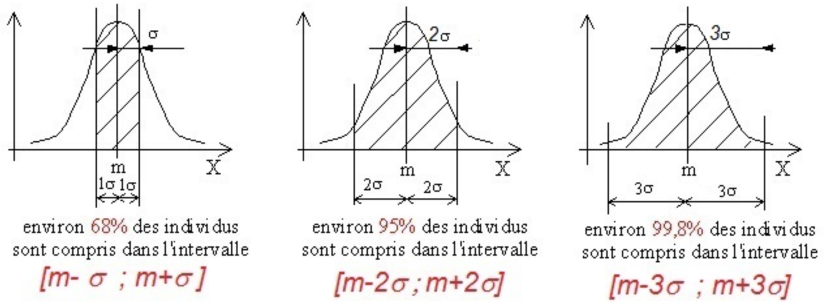
et on a mème $99,7\%$ des individus entre $m-3\sigma$ et $m+3\sigma$:

$$\mathbb{P}[m-3\sigma \leq X \leq m+3\sigma] = 0.997$$

Concentration autour de la moyenne



Concentration autour de la moyenne



Autrement dit, lorsque l'on a une variable aléatoire qui suit une loi Normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$, on est "pratiquement sûr" que la valeur se situera entre $m - 3\sigma$ et $m + 3\sigma$.

Concentration autour de la moyenne

Souvent, lorsque l'on a une variable aléatoire qui suit une loi Normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$, on utilise l'intervalle $[m - 2\sigma; m + 2\sigma]$, pour localiser la valeur la plus probable (à 95%) de la variable. Tout cela est à la base de la théorie des stats/tests...

Concentration autour de la moyenne

Souvent, lorsque l'on a une variable aléatoire qui suit une loi Normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$, on utilise l'intervalle $[m - 2\sigma; m + 2\sigma]$, pour localiser la valeur la plus probable (à 95%) de la variable. Tout cela est à la base de la théorie des stats/tests...

"J'aimerai vivre dans le pays **Théorie***...*

Concentration autour de la moyenne

Souvent, lorsque l'on a une variable aléatoire qui suit une loi Normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$, on utilise l'intervalle $[m - 2\sigma; m + 2\sigma]$, pour localiser la valeur la plus probable (à 95%) de la variable. Tout cela est à la base de la théorie des stats/tests...

"J'aimerai vivre dans le pays **Théorie**... *car en* **Théorie** *tout se passe bien !"*

Définition d'un intervalle de confiance

Définition

Soit θ un paramètre inconnu, et $0 < \alpha < 1$. On dit que $[a; b]$ est un intervalle de confiance (IC) de θ au seuil de sécurité $1 - \alpha$, si :

$$\mathbb{P}(\theta \in [a; b]) \geq 1 - \alpha.$$

Définition d'un intervalle de confiance

Définition

Soit θ un paramètre inconnu, et $0 < \alpha < 1$. On dit que $[a; b]$ est un intervalle de confiance (IC) de θ au seuil de sécurité $1 - \alpha$, si :

$$\mathbb{P}(\theta \in [a; b]) \geq 1 - \alpha.$$

Par exemple, l'intervalle $[-2; 2]$ est un IC au niveau $0,95$ pour $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. En effet, nous venons de voir que :

$$\mathbb{P}[-1.96 \leq X \leq 1.96] = 0.95$$

Définition d'un intervalle de confiance

Définition

Soit θ un paramètre inconnu, et $0 < \alpha < 1$. On dit que $[a; b]$ est un intervalle de confiance (IC) de θ au seuil de sécurité $1 - \alpha$, si :

$$\mathbb{P}(\theta \in [a; b]) \geq 1 - \alpha.$$

Par exemple, l'intervalle $[-2; 2]$ est un IC au niveau $0,95$ pour $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. En effet, nous venons de voir que :

$$\mathbb{P}[-1.96 \leq X \leq 1.96] = 0.95$$

IC

- Assez souvent, les IC seront centrés en l'espérance du paramètre (ou de la v.a).

IC

- Assez souvent, les IC seront centrés en l'espérance du paramètre (ou de la v.a).
- Par exemple, si $Y \sim \mathcal{N}(5, 2)$, on a :
  l'intervalle $[3; 7]$ est un IC au niveau $0, 68$ pour Y, centré en $\mathbb{E}(Y) = 5$.

IC

- Assez souvent, les IC seront centrés en l'espérance du paramètre (ou de la v.a).
- Par exemple, si $Y \sim \mathcal{N}(5, 2)$, on a :
  l'intervalle $[3; 7]$ est un IC au niveau $0,68$ pour Y, centré en $\mathbb{E}(Y) = 5$.
- Les IC sont souvent élaborés à partir d'un échantillon (sondage), en vue notamment de fournir une estimation de paramètres statistiques comme la moyenne, la médiane ou la variance... L'obtention générale d'IC découlera de théorème limite (cf chap suivant).